Topología II
Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2025/26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Profesor José Antonio Gálvez.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 14 de enero de 2026.

Duración 2 horas y media.

Responda a la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4. Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es homotópicamente nula. Aquí, $\mathbb{D}$ denota el disco abierto unidad de $\mathbb{R}^2$.

b) Existe una aplicación recubridora desde $\mathbb{S}^1$ en $X = C_1 \cup C_2$, donde

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

c) Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua entonces f es sobreyectiva o tiene un punto fijo.

Ejercicio 2. Sea X el espacio topológico dado por $\mathbb{R}^3$ menos el eje x y el eje y, es decir,

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \big(\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}\big)$$

Calcula el grupo fundamental de X en el punto $(0, 0, 1)$ y determina generadores de dicho grupo.

Ejercicio 3. Sean X, Y, Z tres espacios topológicos conexos y localmante arcoconexos. Consideremos dos aplicaciones continuas $p_1 : X \to Y$ y $f : Y \to Z$ tales que p_1 y $p_2 = f \circ p_1$ son aplicaciones recubridoras. Demuestra que f también es una aplicación recubridora.
Utiliza lo anterior para demostrar que si a, b, c, d son cuatro números enteros con $ad - bc \neq 0$ entonces la aplicación (bien definida) $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) = (\cos(a\theta + b\varphi), \operatorname{sen}(a\theta + b\varphi), \cos(c\theta + d\varphi), \operatorname{sen}(c\theta + d\varphi))$$

es una aplicación recubridora.

Ejercicio 4. Clasifica la superficie compacta S asociada a la presentación poligonal con expresión:

$$abcadefd^{-1}e^{-1}bf^{-1}c^{-1}$$

¿Es homeomorfa a una suma conexa finita de botellas de Klein? ¿Se cumple que S es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{T}_n \# \mathbb{RP}^2$, para algún n natural?

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es homotópicamente nula. Aquí, $\mathbb{D}$ denota el disco abierto unidad de $\mathbb{R}^2$.

Es verdadera, si consideramos la aplicación recubridora estándar $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$$

Tenemos entonces que $p \times p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una aplicación recubridora.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[d, "p\times p"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Fijado $x_0 \in \mathbb{D}$ y tomando $r_0 \in p^{-1}(\{p(x_0)\})$, como $\mathbb{D}$ es simplemente conexo tenemos que $\pi_1(\mathbb{D}, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$, por lo que tenemos que:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{D}, x_0)) = \{[\varepsilon_{f(x_0)}]\} \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, r_0))$$

Por lo que f se puede levantar, es decir, existe una aplicación $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ continua de forma que

$$f = \hat{f} \circ p$$

Como $\hat{f}$ llega a $\mathbb{R}^2$ y este espacio es contráctil hacia $\{(0,0)\}$, tenemos que existe una homotopía $H : \mathbb{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de forma que:

$$H(x, 0) = \hat{f}(x), \qquad H(x, 1) = (0, 0) \qquad \forall x \in \mathbb{D}$$

Si consideramos ahora la aplicación $(p \times p) \circ H : \mathbb{D} \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, tenemos que $(p \times p) \circ H$ es una aplicación continua con:

$$((p\times p)\circ H)(x, 0) = p(\hat{f}(x)) = f(x), \qquad ((p\times p)\circ H)(x, 1) = (p\times p)(0, 0) = (1, 0, 1, 0) \qquad \forall x \in \mathbb{D}$$

Por lo que f es homotópicamente nula.

b) Existe una aplicación recubridora desde $\mathbb{S}^1$ en $X = C_1 \cup C_2$, donde

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

Es falsa, por reducción al absurdo, supongamos que existe $p : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación recubridora. De ser así, como p es sobreyectiva tenemos que existe $x_0 \in \mathbb{S}^1$ de forma que $p(x_0) = (0, 0)$. Por ser p recubridora, existe U entorno abierto (podemos suponer conexo) de $(0, 0)$ y V entorno abierto de x_0 de forma que $p\big|_V : V \to U$ es un homeomorfismo.

Podemos suponer ahora sin pérdida de generalidad que:

$$U \subseteq X \setminus \{x_1, x_2\} \quad \text{con} \quad x_1 \in C_1 \setminus \{(0,0)\}, \quad x_2 \in C_2 \setminus \{(0,0)\}$$

ya que si no basta tomar $U \setminus \{x_1, x_2\}$ con $x_1 \in C_1 \setminus \{(0,0)\}$ y $x_2 \in C_2 \setminus \{(0,0)\}$, y seguirá siendo un conjunto abierto (ya que $\{x_1, x_2\}$ es cerrado) regularmente recubierto. Bajo estas hipótesis, tenemos que ha de ser $V \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ para $p \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}$, puesto que $(p\big|_V)_*$ es un isomorfismo entre los grupos fundamentales de U y V, y tenemos que U es contráctil, por lo que no puede ser $V = \mathbb{S}^1$.

Así, vemos que podemos considerar el homeomorfismo $\overline{p} : V \setminus \{x_0\} \to U \setminus \{(0,0)\}$ dado por la restricción de $p\big|_V$, pero sin embargo vemos que $V \setminus \{x_0\}$ tiene 2 componentes conexas y que $U \setminus \{(0,0)\}$ tiene 4, hemos llegado a una contradicción, pues $\overline{p}$ debería mantener el número de componentes conexas, por ser un homeomorfismo.

c) Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua entonces f es sobreyectiva o tiene un punto fijo.

Es verdadera, supongamos que $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua que no es sobreyectiva. De ser así, tenemos que existe $p \in \mathbb{S}^1 \setminus f(\mathbb{S}^1)$, con lo que $f(\mathbb{S}^1) \subsetneq \mathbb{S}^1$. Podemos considerar ahora $g : \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo, y vemos que el conjunto:

$$g(f(\mathbb{S}^1)) \subseteq \mathbb{R}$$

es un conjunto compacto y conexo como imagen de un conjunto compacto y conexo por una aplicación continua $(g \circ f)$. Por tanto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$g(f(\mathbb{S}^1)) = [a, b]$$

Si consideramos ahora $h : [a, b] \to \mathbb{S}^1$ dado por:

$$h(x) = g^{-1}(x)$$

Tenemos entonces la aplicación continua $(g \circ f \circ h) : [a, b] \to [a, b]$.

$$[a, b] \xrightarrow{\quad h \quad} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \xrightarrow{\quad g \quad} [a, b]$$

Se ha visto en Cálculo II que este tipo de aplicaciones tienen algún punto fijo[1], por lo que existe $x_0 \in [a, b]$ de forma que:

$$g(f(h(x_0))) = x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(g^{-1}(x_0)) = g^{-1}(x_0)$$

Por lo que tomando $z_0 = g^{-1}(x_0) \in \mathbb{S}^1$ tenemos que $f(z_0) = z_0$.

[1] Piénsese en el conjunto $[a, b] \times [a, b]$ y en la recta $y = x$, que pasa por los vértices inferior izquierdo y superior derecho del cuadrado, la gráfica de cualquier función que dibujemos de $[a, b]$ en $[a, b]$ debe cortar a dicha recta, obteniéndose un punto fijo.

Ejercicio 2. Sea X el espacio topológico dado por $\mathbb{R}^3$ menos el eje x y el eje y, es decir,

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \big(\{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}\big)$$

Calcula el grupo fundamental de X en el punto $(0,0,1)$ y determina generadores de dicho grupo.

Habría que detallar más la solución, pero X tiene por retracto de deformación a $\mathbb{S}^2$ menos 4 puntos, que es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ menos 3 puntos, que tiene grupo fundamental $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3. Sean X, Y, Z tres espacios topológicos conexos y localmante arcoconexos. Consideremos dos aplicaciones continuas $p_1 : X \to Y$ y $f : Y \to Z$ tales que p_1 y $p_2 = f \circ p_1$ son aplicaciones recubridoras. Demuestra que f también es una aplicación recubridora.
Utiliza lo anterior para demostrar que si a, b, c, d son cuatro números enteros con $ad - bc \neq 0$ entonces la aplicación (bien definida) $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) = (\cos(a\theta + b\varphi), \operatorname{sen}(a\theta + b\varphi), \cos(c\theta + d\varphi), \operatorname{sen}(c\theta + d\varphi))$$

es una aplicación recubridora.

La primera parte del ejercicio se corresponde con el Ejercicio 1.3.8. de la relación de ejercicios. Para la segunda parte, buscamos un espacio topológico X y dos aplicaciones recubridoras p_1 y p_2 para poder aplicar el ejercicio.

Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora estándar

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$$

tenemos entonces que $p \times p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una aplicación recubridora. Si consideramos ahora la aplicación $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$h(\theta, \varphi) = (a\theta + b\varphi, c\theta + d\varphi)$$

Vemos que h es continua, así como que la condición $ad - bc \neq 0$ implica que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \theta = a\theta + b\varphi \\ \varphi = c\theta + d\varphi \end{cases}$$

Tiene una única solución, por lo que podemos obtener θ y φ de forma continua (mediante suma, resta, multiplicación y división) a partir de $a\theta + b\varphi$ y $c\theta + d\varphi$, con lo que la aplicación h admite una inversa continua, por lo que h es un homeomorfismo. Ante esta situación, tenemos que $(p \times p) \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una aplicación recubridora, como composición de un homeomorfismo con una aplicación recubridora. Veamos que:

$$(p \times p) \circ h = f \circ (p \times p)$$

Para ello, si $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
(f \circ (p \times p))(\theta, \varphi) &= f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) \\
&= (\cos(a\theta + b\varphi), \operatorname{sen}(a\theta + b\varphi), \cos(c\theta + d\varphi), \operatorname{sen}(c\theta + d\varphi)) \\
((p \times p) \circ h)(\theta, \varphi) &= (p \times p)(a\theta + b\varphi, c\theta + d\varphi) \\
&= (\cos(a\theta + b\varphi), \operatorname{sen}(a\theta + b\varphi), \cos(c\theta + d\varphi), \operatorname{sen}(c\theta + d\varphi))
\end{aligned}$$

Tenemos por tanto el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[r, "p\times p"] \arrow[d, "h"] & \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \\
\mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[urr, "p\times p"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo que aplicando la primera parte de este ejercicio concluimos que f una aplicación recubridora.

Ejercicio 4. Clasifica la superficie compacta S asociada a la presentación poligonal con expresión:

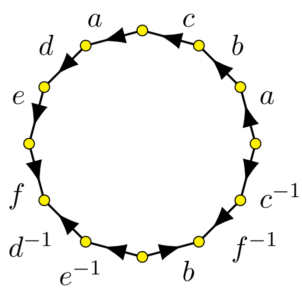
$$abcadefd^{-1}e^{-1}bf^{-1}c^{-1}$$

¿Es homeomorfa a una suma conexa finita de botellas de Klein? ¿Se cumple que S es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2$, para algún n natural?

Como S tiene una sola expresión en su presentación poligonal vemos que S es conexa. Si calculamos su característica de Euler calculando para ello:

- $C = 1$.
- $A = 6$.
- $V = 1$.

Vemos que S solo tiene un vértice:



Por lo que:

$$\chi(S) = V - A + C = -4$$

de done $S \cong \mathbb{T}_3$ ó $S \cong \mathbb{RP}^2_6$. Como la presentación es no orientada tiene que ser $S \cong \mathbb{RP}^2_6$.

Sea K una botella de Klein, en teoría se ha visto que $K \cong \mathbb{RP}^2_2$. Vemos que:

$$S \cong \mathbb{RP}^2_6 = (\mathbb{RP}^2_2)\#(\mathbb{RP}^2_2)\#(\mathbb{RP}^2_2) \cong K\#K\#K$$

Por lo que S es homoemorfa a la suma conexa de 3 botellas de Klein.

Si calculamos la característica de Euler de $\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2$ para cualquier n vemos que:

$$\chi(\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2) = \chi(\mathbb{T}_n) + \chi(\mathbb{RP}^2) - 2 = 2(1-n) + 1 - 2 = -2n + 1 = -(2n-1)$$

Es un número negativo impar, por lo que $\chi(S) \neq \chi(\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2)$ para todo n natural, de donde nunca podrá ser S homeomorfa a $\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2$ para algún n natural.